

4.6.7 Rezonance sériového RLC obvodu

Předpoklady: 4606

Výsledky posledního příkladu z minulé hodiny (sériový obvod s rezistorem, ideální cívkou a kondenzátorem).

frekvence f	celková impedance Z	fázový posun φ	proud I
50 Hz	65,5	$-89^{\circ} 7'$	0,076
100 Hz	27,1	$-87^{\circ} 53'$	0,18
200 Hz	2,99	$-65^{\circ} 45'$	1,7
300 Hz	11,3	$84^{\circ} 51'$	0,44
500 Hz	30,8	$88^{\circ} 8'$	0,16

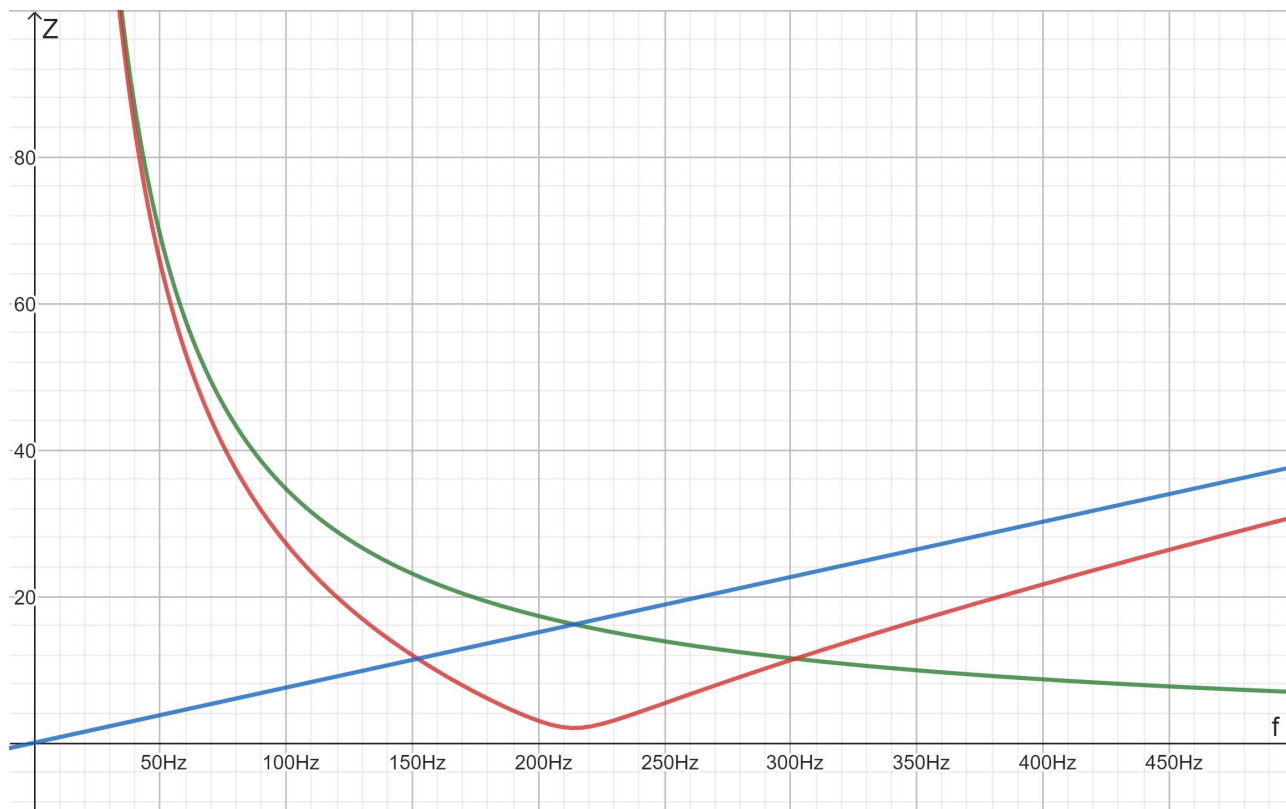
Z tabulky je vidět, že se vzrůstající frekvencí nejdříve impedance klesá a pak zase roste. Záporná hodnota fázového posunu se zmenšuje a pak začne narůstat do kladných hodnot.

Je to logické:

- při frekvenci 50 Hz je větší kapacitance kondenzátoru než induktance cívky, proto se obvod chová jako kondenzátor (záporný fázový posun),
- s rostoucí frekvencí se kapacitance kondenzátoru zmenšuje a induktance cívky roste \Rightarrow při určité frekvenci se vyrovnají (a navzájem vyruší) \Rightarrow impedance obvodu se rovná odporu rezistoru, fázový posun je v tomto okamžiku nulový,
- při dalším zvyšování frekvence induktance dále roste (kapacitance se dále zmenšuje) \Rightarrow obvod se chová jako cívka (kladný fázový posun).

Ještě lépe to bude vidět z grafů:

Graf závislosti induktance, kapacitance a impedance na frekvenci



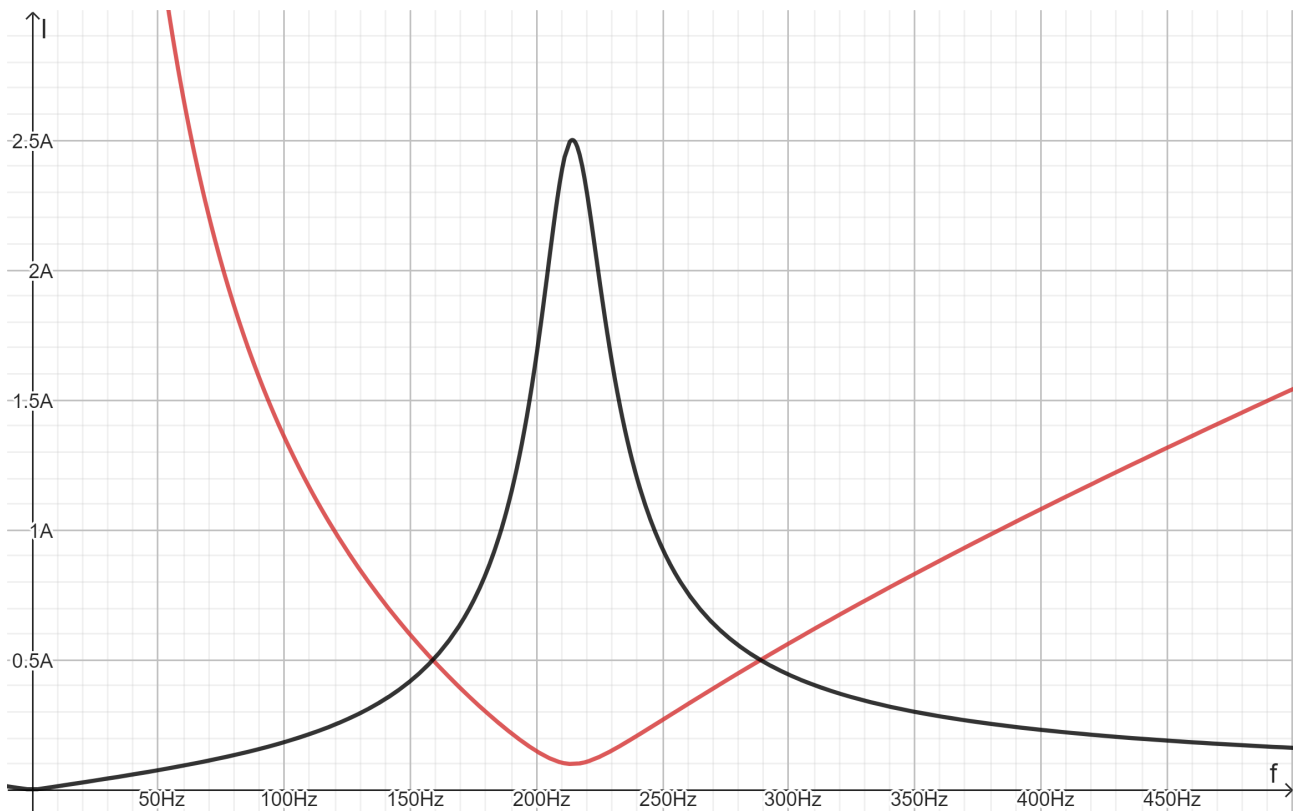
Př. 1: Urči barvy, kterými jsou na předchozím grafu zakresleny jednotlivé veličiny (kapacitance, induktance a impedance).

Induktance s frekvencí roste přímo úměrně \Rightarrow je nakreslena modrou barvou.

Kapacitance s frekvencí klesá nepřímo úměrně \Rightarrow je nakreslena zeleně.

Impedance nejdříve klesá, pak opět roste \Rightarrow je nakreslena červeně.

Na hodnotě impedance samozřejmě závisí velikost procházejícího proudu, která je největší při nejmenší impedanci.



Frekvenci, při které je impedance minimální a procházející proud maximální, nazýváme **rezonanční frekvence**.

Př. 2: Odvoď vztah pro rezonanční frekvenci sériového RLC obvodu.

K rezonanci dochází, když se kapacitance rovná induktanci (vliv cívky a kondenzátoru se navzájem vyruší).

$$X_L = X_C$$

$$\omega L = \frac{1}{\omega C}$$

$$\omega^2 = \frac{1}{LC}$$

$$\omega = 2\pi f = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

Získaný vzorec $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ se nazývá **Thomsonův vztah**.

Dodatek: V tabulkách bývá někdy uveden i tvar $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

Př. 3: Urči rezonanční frekvenci sériového obvodu s rezistorem $2,5 \Omega$, ideální cívkou $0,012 \text{ H}$ a kondenzátorem $46 \mu\text{F}$. Porovnej výsledek s grafy z úvodu hodiny.

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{0,012 \cdot 46 \cdot 10^{-6}}} \text{ Hz} = 214 \text{ Hz}$$

Výsledná frekvence odpovídá údajům ze začátku hodiny (rezonanční frekvence se musí nacházet mezi 100 a 300 Hz, graf impedance má minimum nad hodnotou 210 Hz).

Př. 4: V obvodu je sériově zapojena reálná cívka a kondenzátor $220 \mu F$. Urči parametry cívky, pokud při rezonanci protékal obvodem připojeným k napětí 5 V 60 Hz proud 0,45 A.

Reálná cívka má kromě indukčnosti i odpor.

Rezananční frekvence je určena kapacitou kondenzátoru a indukčností cívky:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

$$\sqrt{LC} = \frac{1}{2\pi f_0}$$

$$LC = \frac{1}{4\pi^2 f_0^2}$$

$$L = \frac{1}{4\pi^2 f_0^2 C} = \frac{1}{4\pi^2 60^2 \cdot 220 \cdot 10^{-6}} \text{ H} = 0,032 \text{ H}$$

Při rezonanci omezuje proud v obvodu pouze ohmický odpor: $R = \frac{U}{I} = \frac{5}{0,45} \Omega = 11 \Omega$.

Cívka zapojená do obvodu má odpor 11Ω a indukčnost $0,032 \text{ H}$.

Př. 5: Kolikrát se změní rezonanční frekvence střídavého sériového obvodu, když se kapacita zapojeného kondenzátoru zvětší třikrát a indukčnost cívky se sníží o třetinu?

Původní frekvence obvodu: $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_0 C_0}}$.

Nová frekvence: $f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$.

Vyjádříme nové hodnoty pomocí původních:

- třikrát větší kapacita $\Rightarrow C = 3C_0$,
- indukčnost o třetinu nižší $\Rightarrow L = L_0 - \frac{1}{3}L_0 = \frac{2}{3}L_0$.

Dosadíme do vztahu pro frekvenci:

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\frac{2}{3}L_0 3C_0}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{2L_0 C_0}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{2\pi\sqrt{L_0 C_0}} = \frac{1}{\sqrt{2}} f_0 = \frac{f_0}{\sqrt{2}}$$

Pro novou frekvenci platí vztah $f = \frac{f_0}{\sqrt{2}}$.

Př. 6: Urči kapacitu kondenzátoru, který je třeba zapojit sériově se žárovkou 6,3 V / 100 mA, aby po připojení k síťovému napětí 230 V 50 Hz žárovka svítila na svých jmenovitých hodnotách.

Připojením kondenzátoru vznikne sériový střídavý obvod \Rightarrow potřebujeme znát odpor svítící žárovky, který určíme ze jmenovitých hodnot.

$$R = \frac{U}{I} = \frac{6,3}{0,1} \Omega = 63 \Omega$$

Po připojení obvodu k síťovému napětí má obvodem procházet proud 100 mA \Rightarrow celková

$$\text{impedance: } Z = \frac{U}{I} = \frac{230}{0,1} \Omega = 2300 \Omega$$

Ze vztahu pro celkovou impedanci určíme kapacitanci a z kapacitance kapacitu kondenzátoru.

$$Z = \sqrt{R^2 + X_C^2} \Rightarrow X_C = \sqrt{Z^2 - R^2}$$

$$\frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot C} = \sqrt{Z^2 - R^2}$$

$$C = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot \sqrt{Z^2 - R^2}} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot 50 \cdot \sqrt{2300^2 - 63^2}} \text{ F} = 1,38 \cdot 10^{-6} \text{ F} = 1,38 \mu \text{ F}$$

K žárovce musíme sériově připojit kondenzátor o kapacitě $1,38 \mu \text{ F}$.

Př. 7: Urči frekvenci, při které bude v sériovém sériového obvodu s reálnou cívkou $2,5 \Omega$, $0,012 \text{ H}$ a kondenzátorem $46 \mu \text{ F}$ fázový rozdíl mezi napětím a proudem 45° (napětí předbíhá proud). Výsledek dopředu odhadni na základě příkladů z minulé hodiny.

Napětí předbíhá proud \Rightarrow indukance je větší než kapacitance.

$$\varphi = 45^\circ \Rightarrow \text{tg } \varphi = 1 \Rightarrow \text{tg } \varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} = 1$$

Hledaná frekvence musí být vyšší než rezonanční frekvence 205 Hz a menší než frekvence 300 Hz (při této frekvenci je fázový posun více než 78°).

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = R$$

$$\omega^2 LC - 1 = R \omega C$$

$\omega^2 LC - R \omega C - 1 = 0$ kvadratická rovnice \Rightarrow dosadíme a vypočteme pomocí vzorce.

$$\omega^2 0,012 \cdot 46 \cdot 10^{-6} - 2,5 \cdot 46 \cdot 10^{-6} \omega - 1 = 0 \quad / \quad 10^6$$

$$0,552 \omega^2 - 115 \cdot \omega - 10^6 = 0$$

$$\omega_1 = -1246 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \text{ (zjevně nereálné)}, \quad \omega_2 = 1454 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$$

$$f = \frac{\omega}{2 \cdot \pi} = \frac{1454}{2 \cdot \pi} \text{ Hz} = 231 \text{ Hz}$$

Fázový rozdíl 45° mezi napětím a proudem se ve zkoumaném obvodu objeví při frekvenci 231 Hz .

Shrnutí: Kapacitance kondenzátoru s frekvencí klesá, indukance cívky s frekvencí roste \Rightarrow při určité frekvenci je celková impedance sériového RLC obvodu minimální – nastává rezonance, obvodem prochází maximální proud s nulovým fázovým posunem vůči napětí zdroje.